

# PROBLEMAS BÁSICOS EN EL CÁLCULO MECÁNICO DE CATENARIAS FERROVIARIAS BASIC PROBLEMS ON THE MECHANICAL CALCULUS OF RAILWAY CATENARIES

Jesús Benet, Enrique Arias, Fernando Cuartero y Tomás Rojo  
Escuela Politécnica Superior de Albacete  
Univ. de Castilla-La Mancha  
Avda. España s/n  
02071-Albacete (España)  
{Jesus.Benet, Enrique.Arias, Fernando.Cuartero, Tomas.Rojo}@uclm.es

**Resumen:** En el presente trabajo se da una visión general del estudio mecánico de catenarias ferroviarias, explicando en primer lugar las bases para la formación de la matriz de rigidez correspondiente a la discretización de las ecuaciones dinámicas, mediante el MEF (Método de los Elementos Finitos), esto permite describir los diferentes problemas, cuál es su relación y orden lógico para su estudio, lo cual es fundamental con objeto de conseguir un mejor comportamiento del sistema pantógrafo-catenaria. Los problemas estáticos correspondientes a la configuración de equilibrio de la línea son explicados con más detalle. Debido al elevado número de variables que aparecen, se comentan también aspectos de carácter informático con objeto de conseguir una mayor eficiencia computacional en el tratamiento matemático de las ecuaciones resultantes.

**Palabras Clave:** Catenarias ferroviarias, interacción pantógrafo-catenaria, computación de altas prestaciones.

**Abstract:** In this work, an overview of the different problems in the mechanical study of a railway catenary is given. At first the basis for the composition of the stiffness matrix, according to discretization of FEM (Finite Element Method) are commented. This allows to describe the different kinds of problems, its relations and logical order for its study; which is fundamental in order to get a better behaviour in the pantograph-catenary system. The static problems are commented with more detail. As a consequence of the great number of variables, aspects in order to obtain a better computational efficiency in the solution of the mathematics equations are also commented.

**Keywords:** Railway catenary, pantograph-catenary interaction, high performance computing.

## INTRODUCCIÓN

Para conseguir unas prestaciones adecuadas en la circulación de las unidades ferroviarias, la fuerza de contacto pantógrafo-catenaria se ha de mantener lo más uniforme posible, evitando las pérdidas de contacto o "despegues". El desarrollo de un modelo matemático que permita simular el comportamiento mecánico del sistema, puede ser de gran ayuda con objeto de especificar unas condiciones de montaje óptimas en la línea aérea de contacto, conocida también como catenaria.

La integración numérica de la ecuación diferencial del sistema pantógrafo-catenaria presenta ciertas dificultades, debido a la necesidad de obtener una adecuada modelización, considerando que el pantógrafo se desplaza a gran velocidad generando una carga móvil sobre la línea, existiendo además otra importante dificultad, debido al gran número de variables que aparecen en la formulación matemática de las ecuaciones, con los consiguientes requerimientos de memoria y tiempo de computación, habiendo aparecido en este sentido algunos trabajos durante los últimos años en la literatura científica (Fernandez y Pastor, 1998, Poestch y Wallaschek, 1995, Poestch et al. 1997 y Universidad de Navarra, 1982).

En el presente trabajo, se comentan una serie de consideraciones a tener en cuenta en la formación de la matriz de rigidez de las ecuaciones dinámicas del sistema, correspondiente a la discretización mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF), ello permite efectuar una visión global de los diferentes problemas que aparecen en el estudio mecánico de la catenaria, cual es su relación y cual debería ser su correcto orden en cuanto a su resolución, explicándose con más detalle los problemas de tipo estático relativos al cálculo de la rigidez de la línea.

## MODELIZACIÓN DE LOS CABLES SUSTENTADOR E HILO DE CONTACTO

La línea aérea de contacto o catenaria se instala considerando una serie de vanos, normalmente 15 ó 20, constituyendo cada serie un sistema independiente, denominado cantón de seccionamiento, los vanos suelen presentar además una longitud de unos 60 m. En los ferrocarriles europeos se pueden considerar básicamente dos tipos de

montajes: el sistema de péndola normal y el sistema de péndola en Y.

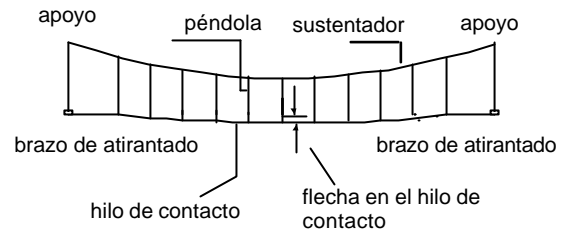


Fig. 1: Vano de catenaria.

En la Figura 1 se muestra un vano con el sistema de péndola normal en el que se pueden distinguir tres tipos de cables: el sustentador, las péndolas y el hilo de contacto. Tanto el sustentador como el hilo de contacto están tensados por poleas y contrapesos independientes, situados en los extremos de cada cantón de seccionamiento.

Para modelizar los cables del sustentador e hilo de contacto, se considera la ecuación diferencial de Euler-Bernouilli para un cable flexible y pretensado en movimiento:

$$(p/g) \cdot \ddot{y} = -E \cdot I \cdot y^{IV} + T_x \cdot y'' - p$$

En donde  $p$  representa el peso lineal del cable,  $T_x$  la componente horizontal de la tensión mecánica del cable,  $E$  el módulo elástico del material,  $g$  la aceleración de la gravedad, y la posición del cable, e  $I$  el momento de inercia diametral de la sección del cable.

Esta ecuación permite efectuar la discretización mediante el MEF, empleando bien el método de Ritz o el método de los residuos ponderados de Galerkin (Cook et al. 1989). Despreciando los efectos dinámicos del cable, es posible obtener la ecuación de equilibrio estático para un segmento de cable, en la forma general:

$$k \cdot q = r$$

En este caso cada nodo presenta dos coordenadas generalizadas, la posición dada por la coordenada  $y_i$  y el ángulo de giro  $\theta_i$ , teniendo para los vectores término independiente y coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -\frac{p.l}{2} \\ p.l^2 \\ -\frac{12}{p.l} \\ \frac{2}{p.l^2} \\ \frac{12}{p.l} \\ 12 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} y_i \\ \mathbf{q}_i \\ y_j \\ \mathbf{q}_j \end{pmatrix}$$

Y para la matriz de rigidez del elemento:

$$\mathbf{k} = \frac{E.I}{l^3} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 6.l & -12 & 6.l \\ 6.l & 4.l^2 & -6.l & 2.l^2 \\ -12 & -6.l & 12 & -6.l \\ 6.l & 2.l^2 & -6.l & 4.l^2 \end{pmatrix} + \frac{T_x}{30.l} \cdot \begin{pmatrix} 36 & 3.l & -36 & 3.l \\ 3.l & 4.l^2 & -3.l & -l^2 \\ -36 & -3.l & 36 & -3.l \\ 3.l & -l^2 & -3.l & 4.l^2 \end{pmatrix}$$

Esta ecuación corresponde a lo que se denomina modelo de viga pretensada. Si se desprecia la rigidez a flexión, la ecuación diferencial del cable se simplifica, obteniendo los siguientes términos:

$$\mathbf{k} = \frac{T_x}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -\frac{p.l}{2} \\ \frac{p.l}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} y_i \\ y_j \end{pmatrix}$$

En este caso existe una única coordenada generalizada asociada al nodo, relativa a su posición vertical. Esta ecuación corresponde al modelo de cuerda pretensada, que equivale a considerar el cable como una serie de elementos rígidos o varillas unidos mediante articulaciones sin rigidez a flexión.

Sin embargo, mediante una sencilla modificación en las ecuaciones anteriores, se puede también tener en cuenta el efecto de la rigidez a flexión, manteniendo una coordenada generalizada por nodo; para ello se introduce un resorte torsional de rigidez  $k_t$  en las articulaciones, tal como se muestra en la Figura 2. En este caso la matriz de rigidez del elemento quedará:

$$\mathbf{k} = \frac{T_x}{l} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{k_t}{l^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Este modelo presenta la ventaja de considerar la rigidez a flexión manteniendo una única coordenada generalizada en el nodo.

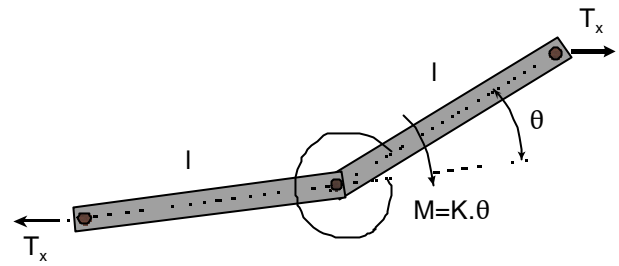


Fig. 2: Modelización de un cable flexible con resortes de torsión.

## MODELIZACIÓN DE LAS PÉNDOLAS

Las péndolas se comportan como barras traccionadas, con una coordenada generalizada por nodo, correspondiente a la ordenada o desplazamiento vertical, deformándose a partir de una longitud inicial. Se puede demostrar que la matriz de rigidez y el término independiente son:

$$\mathbf{k} = \frac{E.A}{l} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{E.A.l_o}{l} \\ -\frac{E.A.l_o}{l} - P \end{pmatrix}$$

Donde A es el área de la sección recta de la péndola, l la longitud de montaje,  $l_o$  su longitud inicial (ligeramente diferente a la longitud de montaje) y P su peso propio. Existe una relación entre la longitud de montaje l, la longitud inicial  $l_o$  y la precarga de montaje F, que viene dada por la siguiente expresión:

$$l_o = l \cdot \left(1 - \frac{F}{E.A}\right)$$

De manera que el término independiente de la ecuación de equilibrio del elemento se puede expresar como:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{E.A.l_o}{l} \\ -\frac{E.A.l_o}{l} - P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E.A - F \\ -E.A + F - P \end{pmatrix}$$

El valor de la precarga F hay que determinarlo mediante análisis estático y es fundamental para el cálculo de la longitud de las péndolas l, dependiendo del peso propio de las péndolas y del peso de hilo de contacto que soporta la

péndola. La determinación de la longitud de montaje de las péndolas es pues un problema básico para la correcta instalación y montaje de la catenaria.

Finalmente hay que tener en cuenta que las péndolas no pueden trabajar a compresión y que en la interacción dinámica pantógrafo-catenaria, la longitud de la péndola varía a partir de la longitud de montaje, resultando lo que podríamos denominar como longitud de trabajo de la péndola, la cual vendría dada por la diferencia de ordenadas en los nodos extremos. Si la longitud de trabajo definida de esta manera, es inferior a la longitud inicial  $l_0$ , la péndola no trabajará y por tanto no habrá de tenerse en cuenta su efecto al ensamblar la matriz de rigidez del sistema. La condición para incluir el efecto de conexión de las péndolas en la matriz de rigidez, será pues:

$$y_i - y_j \geq l_0 = l \cdot \left(1 - \frac{F}{E \cdot A}\right)$$

### EFECTO DEL BRAZO ATIRANTADO

La línea aérea de contacto no está alineada según la línea media de la vía sino que forma un zig-zag, con objeto de que el desgaste del pantógrafo no se concentre en un punto y se distribuya uniformemente según la pletina de contacto, tal como se muestra en la Figura 3.

Para conseguir esto, el hilo de contacto se fija en los apoyos mediante el brazo de atirantado, que es en esencia una barra articulada, situada debajo del apoyo del sustentador que es un apoyo rígido. El brazo está unido a la estructura de sustentación a través del extremo articulado, y sujeta al hilo de contacto por el otro extremo.

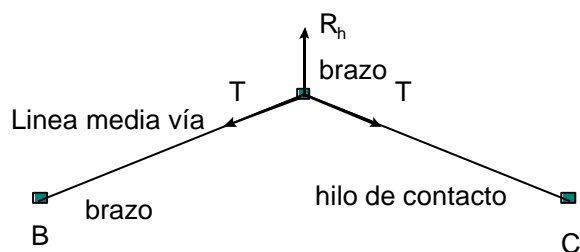


Fig. 3: Fuerzas horizontales sobre el brazo de atirantado. Vista en planta.

Con objeto de instalar correctamente el brazo de atirantado, hay que especificar la altura de montaje  $H_m$ , la cual depende de las fuerzas que actúan sobre el brazo, tal como se

muestra en la Figura 4. En el extremo de agarre del brazo sobre el hilo de contacto, podemos considerar que aparece una fuerza horizontal  $R_h$  y una fuerza vertical  $R_v$ .

La fuerza horizontal  $R_h$  depende de la tensión de montaje del cable  $T$  y de la disposición en zig-zag del hilo de contacto, aunque su cálculo se puede complicar cuando la trayectoria de la vía es una curva, ya que en este caso la catenaria describe una poligonal.

La fuerza vertical sobre el extremo del hilo de contacto  $R_v$ , depende del peso del segmento de cable que soporta, el cual es un valor preestablecido. Normalmente se considera que el brazo soporta la mitad del peso del hilo de contacto comprendido entre las péndolas contiguas de los vanos situados a ambos lados del brazo, si bien este valor puede alterarse a voluntad.

Una vez especificados los esfuerzos horizontal  $R_h$  y vertical  $R_v$ , en el extremo del brazo, así como el peso  $P$ , del mismo y admitiendo que el brazo tiene la forma de barra alargada homogénea, es fácil determinar la altura de montaje  $H_m$ , o distancia vertical entre la articulación y el agarre del hilo de contacto, sin más que considerar la ecuación de equilibrio de momentos de las fuerzas respecto de la articulación  $O$ , de acuerdo con el diagrama de la Figura 4:

$$\begin{aligned} \sum M_O = 0 \rightarrow H_m &= \frac{P \cdot \frac{l}{2} + R_v \cdot l}{\sqrt{R_h^2 + (R_v + P \cdot \frac{1}{2})^2}} = \\ &= \frac{R_{veq} \cdot l}{\sqrt{R_h^2 + R_{veq}^2}} \quad (1) \end{aligned}$$

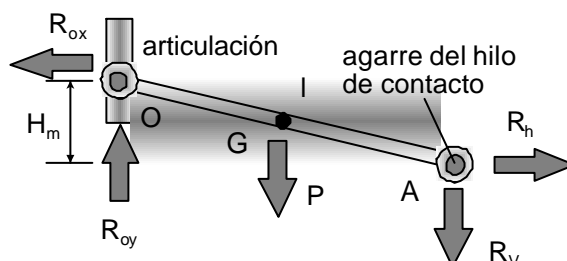


Fig. 4: Fuerzas sobre el brazo de atirantado.

En donde  $R_{veq}$  representa la carga vertical equivalente en el extremo del brazo y tiene en cuenta la carga debida al peso del hilo de contacto que soporta el brazo más el peso equivalente del brazo, suponiendo éste aplicado en el extremo, siendo pues:

$$R_{veq} = R_v + \frac{P}{2} \quad (2)$$

La altura de montaje del brazo, al igual que las longitudes de las péndolas, son parámetros fundamentales en el montaje de la catenaria. Obviamente en ausencia de perturbaciones externas, la altura de montaje y la carga vertical equivalente en el extremo del brazo permanecen constantes. Sin embargo, cuando el pantógrafo está circulando a gran velocidad e interactuando sobre la línea, estos dos valores pueden modificarse; sean  $H_d$  y  $R_{vd}$  los nuevos valores dinámicos de la altura de montaje y de la carga vertical equivalente. La fuerza horizontal,  $R_h$ , se supone que permanece siempre constante y la ecuación (1) se seguirá cumpliendo, para los nuevos valores dinámicos, pudiéndose despejar  $R_{vd}$ :

$$R_{vd}(H_d) = \frac{R_h \cdot H_d}{\sqrt{l^2 - H_d^2}}$$

El efecto del brazo sobre la línea equivale pues a una fuerza puntual ascendente de valor  $R_{vd}$ , que varía en función la altura  $H_d$ . Es posible obtener una relación lineal aproximada entre estos dos parámetros aplicando la fórmula de Taylor a la expresión anterior:

$$\begin{aligned} R_{vd}(H_d) &\approx R_v(H_m) + \\ (H_d - H_m) \cdot \frac{d}{dH_d} R_{vd}(H_d) &= \\ = R_v(H_m) + (H_d - H_m) \cdot \frac{F_h \cdot l^2}{(l^2 - H_m^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$R_{vd}(H_m)$  es en realidad la carga vertical equivalente que soporta el brazo en el momento de efectuar el montaje, cuyo valor viene dado por la ecuación (2), mientras que la diferencia de alturas dinámica y estática del brazo, se puede expresar:

$$\begin{aligned} H_d - H_m &= (y_O - y_A) - (y_O - y_{Am}) = \\ &= y_{Am} - y_A \end{aligned}$$

En donde  $y_O$  representa la ordenada de la articulación O del brazo, que es un valor conocido,  $y_{Am}$  es la ordenada o altura estática de montaje del agarre del brazo sobre el hilo de contacto, que es también un valor conocido, definido por la altura nominal del hilo de contacto, e  $y_A$  representa la altura dinámica del extremo del brazo, que es una variable desconocida. Al término:

$$k_b = \frac{F_h \cdot l^2}{(l^2 - H_m^2)^{3/2}}$$

Se denomina rigidez aparente del brazo, de manera que el efecto del brazo sobre la catenaria equivale a una fuerza puntual ascendente  $R_{vd}$ , de valor:

$$R_{vd}(H_d) = R_v(H_m) + (y_{Am} - y_A) \cdot k_b$$

La fuerza ascendente del brazo, equivale a considerar a éste como si fuera un resorte cuya rigidez es la rigidez aparente  $k_b$  y que ejerce una fuerza inicial sobre la línea, igual a la carga vertical equivalente correspondiente a la altura estática de montaje y una fuerza adicional, igual al producto de la rigidez aparente por la elevación del punto de agarre por encima de la altura estática de montaje.

El efecto del brazo, modelizado de esta forma, es fácilmente ensamblado en la matriz de rigidez del sistema, con objeto de establecer las ecuaciones de equilibrio estático y dinámico.

## PROBLEMA ESTÁTICO. ESQUEMA GENERAL DE LOS DIFERENTES PROBLEMAS

Una vez ensamblada la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  y el vector término independiente del sistema  $\mathbf{R}$ , se obtiene la ecuación de equilibrio estático, que tendrá la forma:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{R}$$

En principio la matriz de rigidez es singular y el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución. Para poder resolver el sistema y determinar las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$  correspondientes a la posición de equilibrio de la catenaria, es necesario introducir las condiciones de contorno correspondientes a las posiciones de los apoyos, para ello se efectúa una partición en el vector de coordenadas, considerando el vector  $\mathbf{q}_1$ , correspondiente a las posiciones de los nodos

libres y el vector  $\mathbf{q}_2$  correspondiente a las condiciones de contorno, que son las posiciones conocidas de los apoyos, quedando la ecuación de equilibrio:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{pmatrix}$$

En donde la matriz  $\mathbf{K}_{11}$  es no singular, pudiendo resolverse el sistema correspondiente a la primera serie de ecuaciones para las variables  $\mathbf{q}_1$ :

$$\mathbf{K}_{11} \cdot \mathbf{q}_1 = \mathbf{R}_1 - \mathbf{K}_{12} \cdot \mathbf{q}_2 \quad (3)$$

Esta ecuación permite conocer la configuración de equilibrio de la catenaria, que viene dada por el vector de las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}_1$ . En cuanto al vector  $\mathbf{q}_2$  correspondiente a las posiciones de los apoyos, si se trabaja con el modelo de viga pretensada, se puede considerar que el apoyo se comporta como un empotramiento perfecto, en ese caso la ordenada  $y_i$  será la altura del apoyo y el ángulo  $\theta_i$  se tomará igual a cero, mientras que si se trabaja con el modelo de cuerda pretensada, los apoyos se pueden considerar que se comportan como articulaciones, siendo en este caso la ordenada  $y_i$  la altura del apoyo. También existe la posibilidad de trabajar con el modelo de viga pretensada y considerar el apoyo como una articulación, en este caso el ángulo de giro del nodo en el apoyo  $\theta_i$  es una variable.

En cuanto a las posiciones de los apoyos, de acuerdo con la Figura 1, en lo que respecta al sustentador, éstos estarán en los extremos de cada vano, mientras que en lo que respecta al hilo de contacto los apoyos estarán situados en los extremos del cantón.

Conviene además aclarar que aunque estos apoyos se han supuesto como rígidos, es posible sin embargo suponer también una cierta elasticidad vertical correspondiente a la deformación elástica de la estructura, especialmente en los apoyos intermedios del sustentador, en este caso, el nodo asociado al apoyo es un nodo libre sometido a una fuerza ascendente vertical de valor:

$$f = k_a \cdot (y_A - y_i)$$

Siendo  $k_a$  la rigidez de la estructura,  $y_A$  la posición vertical del apoyo, que es un valor

conocido e  $y_i$  la altura del nodo asociado al apoyo que es una variable. La ecuación anterior ha de implementarse al configurar la matriz de rigidez de la catenaria  $\mathbf{K}$ .

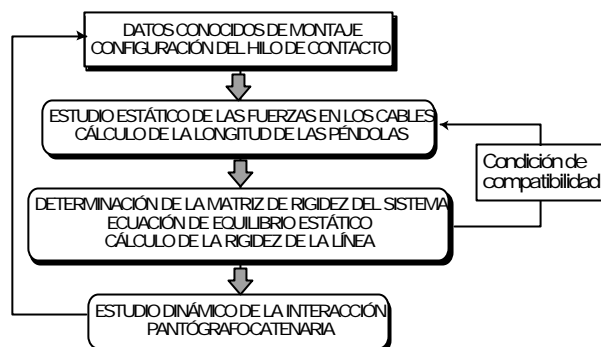


Fig. 5: Esquema de los diferentes problemas en el estudio mecánico de la catenaria.

Al mismo tiempo también hay que tener en cuenta que la estructura sobre la que están situados los apoyos puede girar sobre un eje vertical con objeto de absorber las dilataciones térmicas de los cables, manteniendo constante la tensión mecánica, de acuerdo con los contrapesos situados en las poleas de compensación situadas en los extremos del cantón. Esto significa que los apoyos y por tanto el conjunto de los cables pueden experimentar un cierto desplazamiento horizontal, si bien en el estudio realizado, dicho desplazamiento se ha supuesto despreciable y no se ha tenido en cuenta.

En el estudio del problema estático se puede suponer, bien que no existe ninguna fuerza exterior aplicada sobre la línea, en este caso el vector  $\mathbf{q}$  corresponde a la posición de montaje de los cables, o bien podemos suponer que existe una carga puntual ascendente en algún lugar del hilo de contacto, el estudio de la posición de equilibrio para este último caso es conocido también como cálculo de la rigidez de la línea.

Se puede observar que para la formación de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , se necesita conocer una serie de parámetros algunos de los cuales son en principio desconocidos: tensión horizontal en el sustentador, altura de montaje del brazo de atirantado, precarga, peso propio y longitud de las péndolas. La determinación de estos parámetros requiere un estudio en profundidad de las fuerzas estáticas en los cables, todo ello tiene que hacerse

necesariamente mediante un programa informático, tal como se muestra en las referencias (Benet y Montesinos, 1998, Benet et al., 2000 y Benet, 2002).

Así mismo, el cálculo de la longitud de las péndolas resulta fundamental para efectuar el montaje de la línea. En principio se pretende que el hilo de contacto presente una determinada configuración, bien paralela al plano del terreno, bien describiendo un arco de parábola con una flecha preestablecida en el centro, tal como se muestra en la Figura 1.

La función de la flecha es compensar la diferencia de rigidez del vano entre el centro y los apoyos: la línea es más rígida (o el hilo de contacto experimenta una menor modificación para una fuerza ascendente), a la altura de los apoyos o brazos de atirantado que en el centro del vano, esta variación de la rigidez favorece las oscilaciones del pantógrafo, las cuales son un fenómeno indeseable y pueden atenuarse imponiendo una cierta flecha, aunque el valor óptimo de ésta hay que determinarlo a partir del estudio de los problemas estático y dinámico.

Una vez se dispone de un método para calcular la longitud de las péndolas, podemos suponer diferentes configuraciones variando la flecha, posicionamiento de las péndolas, etc., y evaluar o simular el comportamiento estático y dinámico de la línea, con objeto de obtener unos valores óptimos de montaje.

El desarrollo de un modelo matemático y del algoritmo informático correspondiente, que permita simular el comportamiento del sistema, y en especial conocer la fuerza de contacto pantógrafo-catenaria, será pues fundamental para evaluar el comportamiento de la línea.

En este punto es necesario además efectuar una reflexión: si con el cálculo de péndolas lo que se pretende es que el hilo de contacto tenga una determinada configuración de equilibrio y por otro lado, la ecuación (3) permite calcular la posición de equilibrio estático de la catenaria, es evidente que esta posición ha de coincidir con la configuración impuesta inicialmente al hilo de contacto, al efectuar el cálculo de péndolas previo. Esto es lo que en el esquema de la Figura 5 se ha denominado como condición de compatibilidad. La conformidad de estos resultados validará los procedimientos empleados en el estudio.

Conforme a lo comentado anteriormente, la matriz de rigidez  $K$  es una matriz de gran dimensión, esto es, puede contener un gran número de elementos; y de naturaleza dispersa, esto es, gran cantidad de dichos elementos son nulos.

En una matriz dispersa se puede tomar ventaja de ciertas técnicas especiales para almacenar sus elementos no nulos. Estas técnicas se basan principalmente en la idea de no almacenar aquellos elementos nulos de la matriz, ya que no aportan información; y almacenar en estructuras de datos más fáciles de manejar y más eficientes en cuanto al acceso de los datos que sí poseen información.

Por tanto, de cara a obtener una implementación eficiente de los algoritmos de resolución de los diferentes problemas matemáticos asociados al cálculo mecánico de tendidos eléctricos, es imprescindible almacenar correcta y eficientemente la matriz de rigidez conforme a su naturaleza dispersa.

Una vez almacenada la matriz de rigidez de forma dispersa, para determinar la posición de equilibrio de la catenaria (problema estático), es necesario resolver el sistema de ecuaciones (3).

Hoy en día se disponen de diversos paquetes software estándares para tratar tanto el almacenamiento de la matriz de rigidez en forma dispersa como la resolución del sistema de ecuaciones (3). Uno de los paquetes más populares es SPARSKIT (Saad, 1994).

SPARSKIT permite almacenar los datos en diferentes formatos. Los formatos de almacenamiento disperso más utilizados son (Duff et al., 1986, Saad, 1996 y Barret et al., 1994) Fila Comprimida (CSR), Columna Comprimida (CSC) y Coordinado (COO). Además, incluye diversos métodos iterativos para resolución de sistemas de ecuaciones lineales que permiten, a base de realizar una serie de aproximaciones a cada paso, obtener una solución adecuada para éstos. De entre los métodos iterativos previamente reseñados, caben destacar los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR. De entre los métodos no estacionarios o de proyección destacan Gradiente Conjugado (CG), Mínimo Residuo (MINRES), Generalización del Mínimo Residuo (GMRES) y variaciones (DQGMRES y Quasi-GMRES), Gradiente Biconjugado (BiCG), etc.

Hay que destacar que con la utilización de este tipo de librerías, se obtienen tres características deseables en toda implementación: portabilidad, eficiencia y robustez. La característica de portabilidad permite ejecutar el mismo código en diferentes plataformas, con mínimos o ningún cambio de éste. Se obtiene la característica de eficiencia, sacando el máximo partido al aprovechamiento de la memoria utilizando representaciones eficientes para las matrices dispersas y operando sobre ellas mediante rutinas contenidas en estos paquetes. Finalmente, la robustez se garantiza por el tipo de algoritmos implementados en estas librerías.

## RESULTADOS Y APLICACIONES

Los procedimientos teóricos explicados en los apartados anteriores permiten ensamblar la matriz de rigidez de un cantón de catenaria y determinar la configuración de equilibrio del sistema; de acuerdo con esto, se ha desarrollado un programa informático en lenguaje Visual C, considerando diferentes modelos para el cable, que calcula la posición de equilibrio para una fuerza puntual ascendente sobre el hilo de contacto situada en diferentes posiciones. Para cada posición de la fuerza se ha resuelto el sistema de ecuaciones (3).

Se han realizado pruebas con los diferentes métodos que implementa SPARSKIT, obteniendo buenos resultados, en cuanto a precisión y número de iteraciones se refiere, mediante el método GMRES.

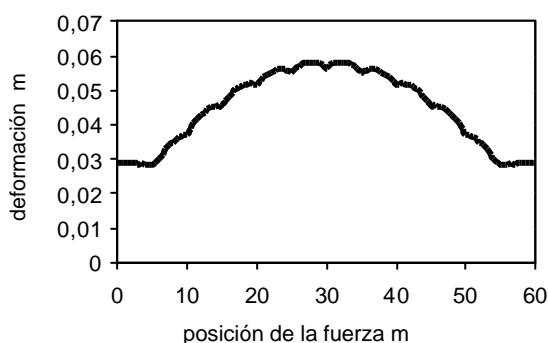


Fig. 6: Gráfica de la rigidez en un vano.

Como ejemplo, se ha tenido en cuenta el vano central de un cantón de tres vanos de 60 m y once péndolas por vano, inicialmente no se ha considerado flecha central. Se ha supuesto una fuerza puntual ascendente de 100 N aplicada sobre el hilo de contacto,

situada a diferentes distancias del apoyo izquierdo del mencionado vano central.

En la gráfica de la Figura 6, se ha representado el desplazamiento vertical del punto del cable donde se ha aplicado la fuerza, respecto de su posición inicial de montaje, en función de la distancia del punto de aplicación de la fuerza al apoyo izquierdo del vano.

En la discretización de los cables, se han considerado elementos de tipo cuerda pretensada en donde la rigidez de flexión se ha modelizado mediante resortes de torsión en los nodos, existiendo una variable por nodo. Se han supuesto elementos de 0,5 m, resultando un total de 356 variables y una matriz de rigidez de 356x356 con una estructura dispersa, el peso de los cables es de 10 N/m, la tensión mecánica en el sustentador de 10 kN y en el hilo de contacto de 20 kN.

En la gráfica se puede observar que la deformación es mucho mayor en el centro del vano, pudiendo llegar a 58 mm, mientras que en los extremos es mucho menor, siendo en este caso de unos 28 mm. Esta diferencia de valores nos define la flecha que sería necesario emplear en una nueva redefinición de los datos de montaje, que en este caso sería de unos 30 mm, con objeto de que el pantógrafo tuviese un movimiento lo más uniforme posible.

Para tener una información más en profundidad del problema es necesario efectuar el estudio dinámico. En este caso es necesario emplear elementos tipo viga pretensada para el hilo de contacto, con dos variables por nodo y de pocos centímetros de longitud, considerando además un cantón de 10 ó 15 vanos, siendo las exigencias de memoria y tiempo de computación mucho mayores.

## CONCLUSIONES

En el presente trabajo se han comentado los diferentes aspectos a considerar en la formación de la matriz de rigidez de la catenaria, de acuerdo con la discretización empleando el MEF, a partir de aquí se han explicado los diferentes problemas que aparecen en el estudio mecánico de la catenaria: determinación de las fuerzas estáticas en los cables, cálculo de la longitud de las péndolas, formación de la matriz de

rigidez y resolución de los problemas estático y dinámico.

El estudio de todos estos problemas no es independiente, estando todos ellos interrelacionados, siendo el cálculo de las fuerzas estáticas en los cables y el cálculo de las longitudes de las péndolas, los problemas más básicos que permiten abordar con éxito el estudio del resto de problemas.

La configuración de la matriz de rigidez y del término independiente, permiten calcular la posición de equilibrio estático del sistema, lo que puede ser de gran utilidad para determinar la rigidez de la línea y tener una primera estimación de varios parámetros de montaje: flecha en el hilo de contacto, número de péndolas por vano etc., habiéndose desarrollado para este fin un programa informático en lenguaje Visual C utilizado en el montaje y diseño de la línea aérea de contacto en los ferrocarriles españoles.

El problema más complejo y el objetivo final del análisis es el estudio dinámico de la interacción pantógrafo-catenaria. La formulación de las ecuaciones diferenciales del sistema y su integración numérica, resulta problemática debido al número elevado de variables; el desarrollo de una metodología eficiente de integración ha de ser objeto de futuros trabajos.

## REFERENCIAS

Barret, R., Berry, M., Chan, T. F., Demmel, J. y Donato, J., Templates for the Solution of Linear Systems, SIAM (1994).

Benet, J., Cálculo Mecánico de Tendidos Eléctricos Ferroviarios. Visión General de los Diferentes Problemas a Estudiar y su

Interrelación, XV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Cádiz, España (2002).  
Benet, J., Cuartero, F., y Rojo, T., A Tool to Calculate Mechanical Forces on Railway Catenary, Seventh International Conference on Computer in Railways, COMPRAIL-2000, Bolonia, Italia (2000).

Benet, J. y Montesinos, J., Cálculo Mecánico de Péndolas de Catenaria para Tendido Eléctrico Ferroviario, XIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Terrassa, España (1998).

Cook, D. C., Malkus, D. S. y Plesha, M. E., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley and Sons (1989).

Duff, I. S., Erisman, A. M., y Reid, J. K., Direct Methods for Sparse Matrices, Clarendon, Oxford (1986).

Fernández, F. A. y Pastor, M., Análisis Mediante Elementos Finitos del Acoplamiento Dinámico Catenaria-Pantógrafo, Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas, España (1998).

Poetsch, G., Evans, J., Meisinger, R., Kortum, W., Baldauf, M., Veitl, A. y Wallaschek, J., Pantograph/Catenary Dynamics and Control, Vehicle System Dynamics: 28:159-195 (1997).

Poetsch, G. y Wallaschek, J., Simulating the Dynamic Behaviour of Electrical Lines for High-Speed Trains on Parallel Computers, International Symposium on Cable Dynamics, Liège, Bélgica (1995).